# Computer im Mathematikunterricht — Erfahrungen und Gedanken

Karl J. Fuchs, Salzburg

## 0. Einleitung

Die Einladung zur Lehrerfortbildungstagung der ÖMG 1996 war ein willkommener Anlaß, meine ganz persönlichen Gedanken und Erfahrungen aus gut 10 Jahren Mathematikunterricht mit Einsatz des Computers zu ordnen und zu Papier zu bringen. Die für den Beitrag ausgewählten Fakten sind folglich sehr stark von persönlichen Erlebnissen beeinflußt und erheben somit auch keinerlei Anspruch darauf, die Entwicklung des Einsatzes von Computern im Mathematikunterricht vollständig zu behandeln.

## 1. Computer - Ein neues Werkzeug für den Mathematikunterricht

### 1.1 Das Programmierwerkzeug Computer

Als zu Beginn der 80er Jahre Seymour Paperts Buch 'Mindstorms - Kinder, Computer und Neues Lernen' in der deutschen Übersetzung auflegt wurde, fühlten sich zahlreiche Mathematikdidaktiker durch Paperts Erfahrungsbericht darin bestärkt, daß der Einsatz des Computers im Mathematikunterricht für einen modernen und zeitgemäßen Unterricht unerläßlich sei. Bei sämtlichen Modellen, die den Einsatz des Computers im Mathematikunterricht vorsahen, wurde jedoch in erster Linie an das Programmierwerkzeug Computer gedacht. So war es nicht verwunderlich, daß sehr bald die Frage nach der geeigneten Programmiersprache die grundsätzliche Diskussion über die Einsatzmöglichkeiten des neuen Werkzeugs überlagerte. Außerdem blieb die gesamte Diskussion einem sehr 'elitären' Zirkel vorbehalten, da die Programmierung des Computers die Kenntnis der Syntax einzelner Programmiersprachen voraussetzte.

Die Folge war, daß der Computer nicht wirklich auf breiter Basis im Mathematikunterricht Einzug hielt. Der Einsatz blieb vor allem jenen an Informatik interessierten Lehrern vorbehalten, die auch als Pioniere den neu eingeführten Informatikunterricht zum größten Teil bestritten.

Sie entwickelten einerseits mit großem Enthusiasmus Übungs- und Visualisierungsprogramme für ihren Mathematikunterricht oder lernten den Schülern das Erstellen einfacher Programme für den Unterricht (z. B. ein Programm zur Lösung einer quadratischen Gleichung nach Eingabe der Koeffizienten *a, b* und *c*).

Dieser 'elitäre Zug' der CiU - Bewegung war wohl auch ein Hauptbeweggrund von Peter Bender, 1987 seine 'Kritik der LOGO - Philosophie' [BENDER 1987] zu veröffentlichen Zahlreiche heftige Reaktionen folgten diesem Beitrag [ZIEGENBALG 1987, LÖTHE 1987, SCHUPPAR 1987]. Leider wurde in diesen Diskussionsbeiträgen Benders so wesentlicher Hinweis auf das 'Primat der Mathematik' [BENDER 1987, S. 13] - so glaube ich - übersehen. Dies veranlaßte mich 1988 in einem weiteren Diskussionsbeitrag zu Benders Artikel folgende Hypothesen zum Programmierwerkzeug Computer zu formulieren: [FUCHS 1988]

Hypothese 1: Ein Unterricht, der an der Übersetzungsebene beginnt, stellt ein stufenweises System der Problemlösung auf den Kopf.

Problemlösungen erfordern gewisse Lösungsstrategien. Diese Lösungsstrategien müssen wir zunächst möglichst genau und umfassend beschreiben. Denken wir in dieser Phase bereits an die Syntax einer bestimmten Programmiersprache, so schränkt dies unsere Lösungswege ein.

Hypothese 2: Für die schrittweise Lösung von Problemen ist es notwendig , die Problemstellungen zu analysieren und zu strukturieren, und zwar vor jeder und weitgehend unabhängig von jeder Übersetzungsarbeit am Computer.

Neben der verbalen Beschreibung erkannte ich beim Problemlösen immer mehr die Wichtigkeit von graphischen Darstellungen von Beziehungsstrukturen (vgl. dazu *Idee des Beschreibens des Arbeitsablaufs bei der Lösung eines Problems*, Kap. 2 Computer und fundamentale Ideen).

Die in Hypothese 1 und 2 vorgetragenen Überlegungen mündeten schließlich in ein System stufenweisen Problemlösens, das ich als dritte Hypothese im Diskussionsbeitrag vorstellte.

Hypothese 3: Ein gewissenhaft durchgeführter Problemlöseprozeß sollte nach meiner Ansicht die einzelnen Stufen des nachfolgenden Modells durchlaufen:

I: Beschreibung eines Lösungsalgorithmus

II: Graphische Darstellung des Lösungsalgorithmus

III. Handsimulation des Lösungsalgorithmus

IV: Übersetzung des Algorithmus in eine Programmiersprache (Festlegen der Ein- und Ausgabedaten)

V:Testen und Korrigieren der Kodierung

### 1.2 Auf dem Weg zur anwenderfreundlichen Software

Wohl stand bereits seit der Einführung des selbständigen Unterrichtsfachs Informatik mit dem integrierten Softwarepaket Open Access auch ein Kalkulationsprogramm zur Verfügung, das Programm wurde jedoch kaum für den Regelunterricht genützt. Im Schuljahr 1987/88 wurde ich vom Landesschulrat für Salzburg mit der Leitung eines Kurses mit dem Titel 'Dynamische Prozesse' für mathematisch interessierte Schüler eingeladen [FUCHS 1988]. Auf der Suche nach geeigneter Software zur Simulation der Modelle und zum Studium der Auswirkungen der Variation einzelner Parameter griffen wir zunächst auf den Tabellenkalkulationsmodul von Open Access zurück. Im Laufe des Kurses wurden wir durch einzelne Veröffentlichungen über das mathematische Modellieren dynamischer Vorgänge [CRAEMER 1985, ROBERTS 1983] auf das Programm DYNAMO aufmerksam. Es handelt sich dabei um eine Software, die eine nahezu unmittelbare Übersetzung der mathematischen Gleichungen in den DYNAMO - Quellkode gestattet.

1989 bei einem einwöchigem Jugendlager am RISC Linz in Hagenberg lernten die Schüler überdies erstmalig das Computeralgebrasystem DERIVE kennen, mit dem sie unter Anleitung von Klaus Aspetsberger und Bernard Kutzler arbeiten konnten.
Unter dem Titel 'Informations- und kommunikationstechnische Grundbildung' wurde vom BMUK eine Offensive zu einem noch stärkeren Einsatz des Computers im Unterricht eröffnet. Als Trägerfächer wurden neben den Unterrichtsgegenständen Deutsch und Englisch vor allem auch die Fächer Mathematik und Geometrisches Zeichnen genannt.

Für den Mathematikunterricht war dabei vor allem der Einsatz des Tabellenkalkulationsprogramms Supercalc vorgesehen, für den Geometrisch - Zeichenunterricht wurden den Anforderungen des Geometrisch - Zeichenunterrichts entsprechend Konstruktionsprogramme entwickelt. Gleichzeitig entstanden methodisch - didaktische Beiträge, die sich mit dem neuen Medium Computer auseinandersetzten. So finden wir in einem Tagungband 'Informatik in der Schule - Informatik für die Schule [MITTERMEIR, u. a. 1992] im Kapitel 'Informatik in nicht - informatorischen Fächern' einen Beitrag von Edith Schneider, die Parametervariationen an quadratischen Funktionen mit dem Computeralgebrasystem THEORIST vorstellt (vgl. dazu Abschnitt 2.2.1), sowie experimentelle und strukturelle Überlegungen zum Einsatz von Tabellenkalkulationsprogrammen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung von Erich Neuwirth.
Bereits 1989 habe ich meine Gedanken zum Einsatz des Computers im Geometrisch - Zeichenunterricht auf einer Tagung in München unter dem Titel 'Integrieren statt Ersetzen' [FUCHS 1989] vorgestellt. In diesem Beitrag habe ich versucht aufzuzeigen, daß das Herstellen und Aufstellen von Konstruktionsbeschreibungen eine Basis für die Idee des Algorithmus darstellt, die genetisch vor dem Umgang mit dem Computer liegt. So bin ich davon überzeugt, daß durch die geforderte Einbindung informatorischer Inhalte in den Geometrisch - Zeichenunterricht der Konstruktionsbeschreibung wieder ein höheres Augenmerk geschenkt werden muß. Die Geometrie nützt somit die Chance der Grundlegung algorithmischen Denkens, auf die Bender und Schreiber in ihrer 'Operativen Genese der Geometrie' besonders hinweisen (vgl. dazu ebenso *Idee des Algorithmus* sowie *Idee des Beschreibens des Arbeitsablaufs bei der Lösung eines Problems*, Kap. 2 Computer und fundamentale Ideen).
Vorschläge für den Einsatz des Computers im Mathematik und Geometrisch - Zeichenunterricht finden sich auch in 'Didaktik der Mathematik' [REITER, RIEDER 1990].

### 1.3 Der symbolische Rechner im Mathematikunterricht

Als nun das BMUK zu Beginn der neuziger Jahre eine Generallizenz von DERIVE für sämtliche höheren Schulen in Österreich erwarb, stand nun der Schule eine Software zur Verfügung, die in ihrer Bedienung sehr einfach war und erstmalig numerische, graphische und symbolische Fähigkeiten vereinte.

Da jedoch Vorschläge für konkrete Unterrichtsmodelle fehlten, blieb der Einsatz von DERIVE auf Einzelaktivitäten in einzelnen Bundesländern beschränkt. Dies veranlaßte Eduard Szirucsek im Sommer 1991, ein Treffen der Arbeitsgemeinschaftsleiter für Mathematik in Linz einzuberufen, bei dem Klaus Aspetsberger und Bernhard Kutzler die vielseitigen Einsatzmöglichkeiten des Programms vorstellten. Die Arbeitsgemeinschaftsleiter sollten anschließend als Multiplikatoren eine verstärkte Fortbildung in DERIVE in ihren Bundesländern anregen. In kurzen Abständen wurden weitere Folgetreffen vereinbart, bei denen die teilnehmenden Arbeitsgemeinschaftsleiter Unterrichtsmodelle vorstellten und über die Fortbildungsaktivitäten in ihren Bundesländern berichteten.
Helmut Heugl und Bernhard Kutzler war es zu verdanken, daß die internationale Konferenz über Methodik und Didaktik von DERIVE im Frühjahr 1992 in Krems stattfand. Zu dieser Konferenz, zu der auch engagierte Lehrer aus vier österreichischen Bundesländern eingeladen wurden, konnten österreichische Lehrer erstmalig ihre Erfahrungen im Umgang mit DERIVE einem internationalen Publikum vorstellen. Man muß sich jedoch dabei vor Augen halten, daß es sich weitestgehend um Erfahrungen aus Schulversuchen und speziellen Leistungskursen handelte. Erst im Rahmen eines Unterrichtsprojekts, das 1993 vom BMUK in drei Bundesländern gestartet wurde, wurden die Auswirkungen des Einsatzes von Computeralgebra auf den Regelunterricht auf breiter Basis untersucht. Zusätzlich wurden dabei einerseits Materialien zum Einsatz von DERIVE im Mathematikunterricht erstellt, andererseits wurden auch umfangreiche begleitende Methodenuntersuchungen von Robert Nocker sowie vom Zentrum für Schulversuche durchgeführt.

Eine ausführliche Darstellung über die behandelten Inhalte, die verwendeten Methoden und die unterschiedlichen didaktischen Konzepte findet sich im Sonderheft des International DERIVE Journal mit dem Titel 'The Austrian Project' [ed. ASPETSBERGER, FUCHS 1996] bzw. im umfangreichen Beitrag 'Computeralgebrasysteme im Mathematikunterricht der Allgemeinbildenden Höheren Schulen in Österreich' [HEUGL 1995].

Da man nun mit der Computeralgebra über ein Werkzeug verfügt, das numerische, graphische und symbolische Fähigkeiten anbietet, ist es nur verständlich, daß sich angesichts dieser Entwicklung die meisten didaktischen Publikationen zum Thema 'Computer im Mathematikunterricht' mit dem Einsatz von Computeralgebrasystemen befassen.

Der überwiegende Teil dieser Publikationen bezieht sich auf DERIVE, es werden aber auch Unterrichtsmodelle für Systeme wie MATHEMATICA [KOEPF 1993] oder MAPLE [FUCHS 1995] vorgestellt.

Die jüngste Entwicklung stellt der Rechner TI 92 dar, der das Computeralgebrasystem DERIVE gleichsam im Taschenformat anbietet. Die Vorstellung von Schulklassen, in denen jeder Schüler über den DERIVE - tauglichen Rechner verfügt, rückt somit in greifbare Nähe. Über einen Schulversuch am Stiftsgymnasium Wilhering und erste Beobachtungen beim Einsatz des TI 92 berichtet bereits Klaus Aspetsberger [ASPETSBERGER 1995].

Abschließend sei festgestellt, daß der Lehrplan für Mathematik keiner revolutionären Veränderung bedarf, wenn wir das Werkzeug Computer einsetzen wollen. Vielmehr bedarf es der Phantasie des einzelnen Lehrers in den Stoffinhalten jene Aufgaben aufzuspüren, die sich für einen Computereinsatz besonders eignen. Die Universitäten - wie ich das auch für unser Institut feststellen kann - reagieren bereits vermehrt bei der Ausbildung künftiger Lehrer auf die neuen Erfordernisse.

## 2. Computer und fundamentale Ideen

### 2.1 Fundamentale Ideen als ordnende Prinzipien

Der Vorschlag einzelne Stoffe des Mathematikunterrichts an ordnenden Prinzipien oder Grundideen zu orientieren geht auf J. Bruner zurück. So beschreibt W. Loch im Vorwort zur deutschen Übersetzung von Bruners Buch 'Der Prozeß der Erziehung' die Vermittlung der Struktur, der 'fundamental ideas', der jeweils zugrundliegenden Wissenschaften als entscheidendes Unterrichtsprinzip für jedes Fach oder jede Fachgruppe. Bei Bruner selbst finden wir jedoch keinen Definitionsversuch und keinen Katalog fundamentaler Ideen der Mathematik.

Erst Erich Wittmann schlägt in seinem Buch 'Grundfragen des Mathematikunterrichts' [WITTMANN 1981] vor, die „... *Erklärungskraft der fundamentalen Begriffe und Ideen* ..." von Anfang an für den Mathematikunterricht zu nutzen.

„... Der Weg ist dazu frei, da die Mathematik nicht an ein absolutes Niveau der Strenge und nicht an die symbolische Darstellungsform gebunden ist, sondern sich auf vielfache Weise konkretisieren, elementarisieren und vereinfachen läßt [WITTMANN 1981, S.28]. Verschiedene Kataloge fundamentaler Ideen wurden im Anschluß veröffentlicht [HALMOS 1981, TIETZE, KLIKA, WOLPERS 1981, SCHWEIGER 1982, BENDER, SCHREIBER 1985].

Neben dem Vorschlag den Mathematikunterricht an fundamentalen Ideen zu orientieren, finden wir jedoch bei Erich Wittmann auch den Hinweis, daß „... im modernen Unterricht der reine und der angewandte Aspekt der Mathematik *ausgewogen aufeinander bezogen werden* sollen..." [WITTMANN 1981]

Diese Forderung nach einem Anwendungs- und Realitätsbezug neben der reinen Mathematik gewann erst in jüngster Zeit an Einfluß auf den Mathematikunterricht und hat die Diskussion über fundamentale Ideen zusätzlich bereichert. H. C. Reichel hat nun 1995 mit einem Katalog fundamentaler Ideen der Angewandten Mathematik auf diese Entwicklung reagiert. Wie nicht anders zu erwarten, trägt diese Liste der aufgeführten Ideen der immer stärker werdenen Integration des Computers in den Mathematikunterricht besonders Rechnung. Weiters wird der interessierte Leser einzelne Kriterien der Begriffsdefinition fundamentaler Ideen von F. Schweiger im Artikel von H. C. Reichel wiederfinden.
Denn will man laut H. C. Reichel eine veränderte Haltung oder Einstellung gegenüber dem Mathematikunterricht erreichen, so „... bedarf es Fundamentaler Ideen, gewisser Schemata, Techniken, Strategien, Prinzipien und Denkweisen...". Weiters meint Reichel „...,daß sie - gemeint sind die fundamentalen Ideen - geeignet sind, die Lehrpläne vertikal zu strukturieren und - so gesehen - ein Fundament sowohl des Unterrichts als auch des Faches selbst bilden können..." [vgl. SCHWEIGER 1982].
Im Katalog von H. C. Reichel finden sich
- einerseits Ideen, die sich bereits in früheren Vorschlägen auffinden lassen, wie
    - die Betonung von Algorithmen [TIETZE, KLIKA, WOLPERS 1981, BENDER, SCHREIBER 1985 - Idee des *Algorithmus*]
    - das Arbeiten mit mathematischen Modellen [TIETZE, KLIKA, WOLPERS 1981 - Idee der *Modellbildung*]

- andererseits Ideen, die neuartige Ansätze darstellen, wie
    - das Problemlösen durch Standpunktwechsel. Gemeint ist damit insbesondere ein betonter Wechsel zwischen verschiedenen Beschreibungsformen gleichartiger Situationen (z. B. diskret - kontinuierlich).
    - Algebraische vs. Numerische Äquivalenz. Dieser Punkt berührt den (numerisch) bewußten Umgang mit Näherungswerten' beim Arbeiten mit Werkzeugen wie TR und Computer.
    - das Beschreiben des Arbeitsablaufs bei der Lösung eines Problems. Gemeint ist mit dieser Idee das Bewußtmachen von Lösungssstrategien und Methoden. Dieses Bewußtmachen soll nach Reichel die Fähigkeit zum Transfer, also die Fähigkeit zum Übertragen von Strategien und Methoden auf neue Problemlösungen stärken. Auch das Arbeiten in Moduln, das heißt das Auflösen eines komplexen Problems in kleinere Bausteine, eben Module, wird von Reichel besonders gefordert.

Die zentrale Idee der *Modellbildung* und jene des *Beschreibens von Arbeitsabläufen* habe ich selbst 1994 in einen Kanon fundamentaler Ideen der Informatik aufgenommen [FUCHS 1994]. Die Idee des *Beschreibens von Arbeitsabläufen* habe ich jedoch der noch umfassenderen Idee der *Strukturen* untergeordnet, die sich eben in *Daten- und Beziehungsstrukturen (= Ablaufsstrukturen)* gliedern. Diese Frage der Unterordnung spiegelt nicht zuletzt das Problem der Konkretisierung fundamentaler Ideen wieder. So betonen einzelne Autoren, daß die Zahl der Ideen klein bleiben soll, während wiederum andere Autoren umfassende Kataloge fundamentaler Ideen angeben. Nicht zuletzt bleibt jedoch die Forderung , „... man muß geduldiger als bisher, nicht nur für die Schüler, sondern auch für den Lehrer, die zugrundeliegenden Ideen faßbar machen und auf diese konzentriert hinarbeiten...." [JUNG 1978].

### 2.2 Beispiele für fundamentale Ideen

Wie in Abschnitt 1.3 dargelegt, denken wir beim zeitgemäßen Einsatz des Computers im Mathematikunterricht in zunehmender Weise an die Verwendung von Computeralgebrasystemen.

Für eine Tagung über Didaktik der Computer-Algebra in Hawaii 1995 haben Klaus Aspetsberger, Fritz Schweiger und ich ein noch unveröffentlichtes Papier zum Thema 'Fundamentale Ideen und Symbolic Computation' verfaßt [ASPETSBERGER, FUCHS, SCHWEIGER 1996]. Dabei sehen wir fundamentale Ideen als Knoten in einem Netz, wo sich die fundamentalen Ideen und die verschiedenen mathematischen Gebiete treffen.
Diese Knoten stellen verschieden große Inseln dar, die mit verschiedenen Niveaus der Strenge (gemäß Wittmann) und verschiedenen Repräsentationsmodi (symbolisch (d. h. durch Zeichen und Sprache), ikonisch (d. h. durch Bilder), enaktiv (d. h. durch Handlungen)) korrespondieren.

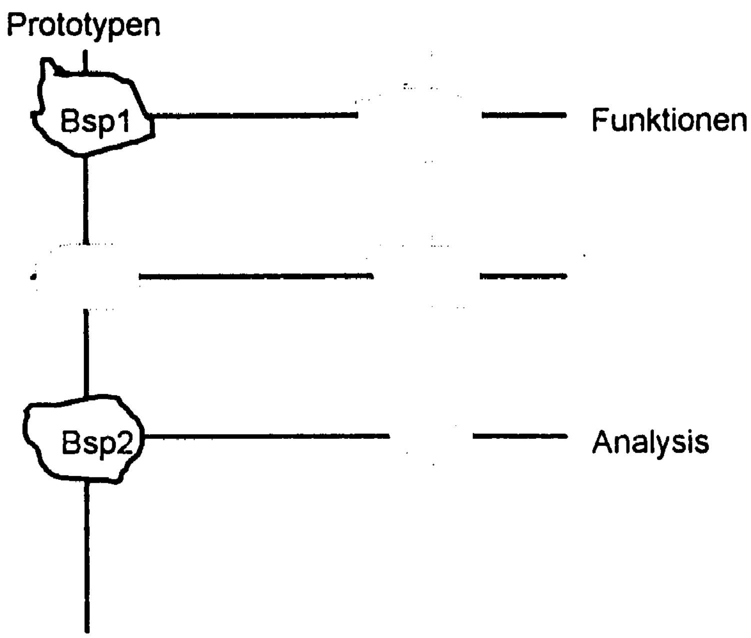


Abb. 1: Das Netz fundamentaler Ideen

Computeralgebraprogramme wirken unter anderem vor allem unterstützend

beim Herausarbeiten von Prototypen von Funktionen (Beispiel 1)

beim Erarbeiten der Eigenschaften reeller Funktionen (Beispiel 2)

### 2.2.1 Beispiel 1: Herausarbeiten von Prototypen reeller Funktionen

Vorschläge zur Untersuchung der Auswirkungen von Änderungen einzelner Parameter auf das Verhalten der Funktion bzw. auf die Gestalt des Funktionsgraphen finden sich in [SCHWEIGER 1995 - am Beispiel: Exponentialfunktion, ASPETSBERGER, FUCHS, KLINGER 1994 und ASPETSBERGER, FUCHS 1996 - am Beispiel: Winkelfunktion, sowie ASPETSBERGER, FUCHS 1996 - am Beispiel: Lineare Funktion und Quadratische Funktion].

Betrachten wir die Unterrichtseinheit für den Prototyp *Quadratwurzelfunktion* $f: R_0^+ \to R_0^+; x \to \sqrt{x}$ . Der Unterricht beginnt mit einer heuristischen Phase, in der der Schüler die Funktionsgraphen für $a\sqrt{x}; \sqrt{x}+a; \sqrt{x+a}$ für verschiedene Werte von $a$ zeichnet und Vermutungen über das Verhalten der Funktionsgraphen im Heft niederschreibt. Die Ergebnisse werden abschließend mit der gesamten Klasse besprochen, präzisiert und zusammengefaßt. Arbeitsblätter mit Term-Graph-Zuordnungsübungen sollen den Umgang mit dem einzelnen Prototyp festigen.

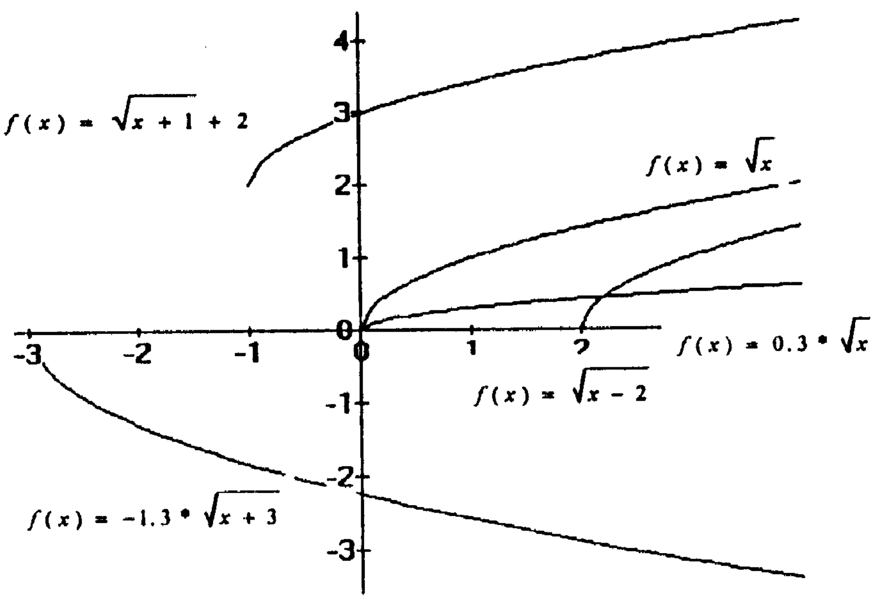


Abb. 2: Parametervariationen Prototyp *Quadratwurzelfunktion*

Dieses Herausarbeiten von Prototypen soll nicht zuletzt zu einer Verfügbarkeit von vorhandenem Wissen etwa beim späteren Modellbilden (z. B. Einpassen von Funktionen in vorgegebene Datenpunkte) führen, da man erwarten kann, daß nach diesen Erarbeitungs- und Übungseinheiten der Schüler über ein größeres Repertoire von 'einpassungsfähigen' Funktionen verfügt. Nahe liegt auch die Vermutung, daß die Untersuchung der Eigenschaften einzelner reeller Funktionen durch eine bessere Kenntnis des Verlaufs der Funktionsgraphen erleichtert wird.

### 2.2.2 Herausarbeiten einzelner Eigenschaften reeller Funktionen

Die Besprechung einzelner Eigenschaften reeller Funktionen, wie Stetigkeit oder Differenzierbarkeit gehört zu den wichtigsten Schritten im Analysisunterricht der Oberstufe. Bei der Verwendung von Computern im Mathematikunterricht erweist sich ein Zugang zur Differenzierbarkeit über die lineare Approximation als sehr vorteilhaft, da sich mit dem Computer als 'Funktionenmikroskop' die 'gute' Näherung einer an einer Stelle $x_0$ differenzierbaren Funktion $f$ gewissermaßen durch 'die Lupe' offenbart. Ein einfaches Funktionenmikroskop habe ich bereits 1985 in der Computersprache LOGO programmiert [FUCHS 1985].

Ausgehend vom Linearisierungsgedanken (d. h. alle nichtlinearen Anteile werden vernachlässigt) kann man auch sehr einfach erste Einsichten in Differentiationsregeln vermitteln. Ein algebratauglicher Rechner kann dabei sehr vorteilhaft als 'Experte' zur Überprüfung der Ergebnisse eingesetzt werden [FUCHS 1996].
Ausführlicher möchte ich das Beispiel der 'Folgenstetigkeit' ausführen.

Es sei also $f: D \to R$ eine reelle Funktion. Wenn für jede beliebige konvergente Folge $(x_n); x_n \in D$ aus $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ folgt, so ist $f$ stetig in $x_0$.

Untersuchen wir den Graph von $f: \left]\frac{4}{3},\infty\right[ \to R; x \to \frac{1}{\sqrt{3x-4}}$, so können wir vermuten, daß die Funktion in $x_0 = 2$ stetig ist.

Gehen wir also unserer Vermutung nach. Als konvergente Folge wählen wir $x_n = 2 + \frac{1}{n^3}$.

Generieren wir die Folgenelemente von $(x_n)$ und $(f(x_n))$ und studieren wir das Verhalten der Folgenelemente.

```
>evalf(seq(2+1/n^3,n=1..10));
```

3., 2.125000000, 2.037037037, 2.015625000, 2.008000000, 2.004629630, 2.002915452, 2.001953125, 2.001371742, 2.001000000

```
>f:=x->1/sqrt(3*x-4);
```

$$f := \frac{1}{sqrt(3x-4)}$$

```
>evalf(seq(f(2+1/n^3),n=1..10));
```

.4472135956, .6488856845, .6882472015, .6989632452, .7029019464, .7046642631, .7055656823, .7060732505, .7063804259, .7065770469

Um das Verhalten der beiden Folgen zu verdeutlichen plotten wir die ersten 10 Folgenelemente.

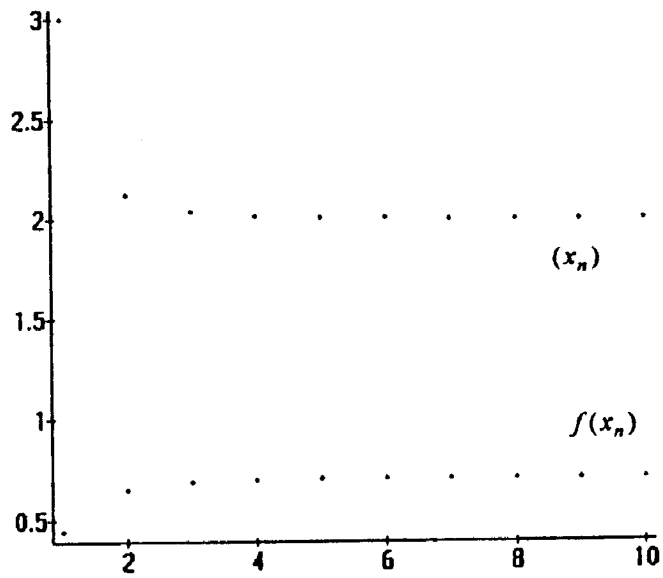


Abb. 3 Die ersten 10 Folgenelemente von $(x_n)$ und $(f(x_n))$

Die Folgenelemente von $(f(x_n))$ scheinen auch gegen einen Wert $f(x_0)$ zu laufen. Der Schüler wird nun motiviert sein, durch die Grenzwertberechnung von $(f(x_n))$ seine Vermutung zu überprüfen.

Anmerkung: Natürlich wird man die dargestellte Sequenz für mehrere verschiedene konvergente Folgen ausführen müssen, um die Bedingung 'für jede beliebige konvergente Folge' einigermaßen zu berücksichtigen.

**3. Resümee**

Ich möchte meine Erfahrungen und Gedanken zu gut 10 Jahre Computer im Mathematikunterricht mit dem Resümee aus meinem Diskussionsbeitrag von 1988 beschließen, das - wie ich glaube - heute noch immer uneingeschränkte Gültigkeit besitzt:
„... Wenn wir uns stets bewußt sind, daß Kodierung, Test und Korrektur am Computer nur Teile - und hier keine Kernteile - eines Problemlöseprozesses sind, so wird der Computer jenen Platz im Rahmen der Mathematik erobern, der ihm gebührt, nämlich als wichtiges Werkzeug ...
... zur raschen Visualisierung,
... zur Übernahme von Routinetätigkeiten,
... zur raschen Bewältigung (Sichtung, Ordnung) großer Datenmengen,
... zur Simulation dynamischer Systeme..." [FUCHS 1988].

**Literatur:**

Aspetsberger K.: Bericht über einen Schulversuch. In: TI - Nachrichten 2, 1995, S. 8-9
Aspetsberger K., Fuchs K.: The Austrian Project. In: The International DERIVE Journal, 1996
Aspetsberger K., Fuchs K.: Computeralgebrasysteme im Mathematikunterricht: Reelle Funktionen. Beiträge zum Mathematikunterricht 1996 (im Druck)
Aspetsberger K., Fuchs K.: Computer Algebra Systeme für den Mathematikunterricht. In: Praxis der EDV/Informatik, Verlag Jugend & Volk, 1996

Aspetsberger K., Fuchs K., Schweiger F.: Fundamental ideas and symbolic algebra. In: The State of Computer Algebra in Mathematics Education. Chartwell - Bratt, 1996

Aspetsberger K., Fuchs K., Klinger W.: DERIVE - Beispiele und Ideen. Zentrum für Schulentwicklung, Klagenfurt, 1994

Bender P.: Kritik der LOGO - Philosophie. In: Journal für Mathematik - Didaktik 8, 1987, H. 1/2, S. 3-103

Bender P., Schreiber A.: Operative Genese der Geometrie. Verlag HPT, Wien, Stuttgart, 1985

Bruner J.: Der Prozeß der Erziehung. Schwann, Düsseldorf, Berlin, 1976[4]

Craemer D.: Mathematisches Modellieren dynamischer Vorgänge. Teubner Verlag, Stuttgart, 1985

Fuchs K.: Die Turtle als Integraph - Ein didaktisches Konzept zur Visualisierung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. In: Mathematiklehren, H. 13, 1985, S. 52, 53

Fuchs K.: Erfahrungen und Gedanken zu Computern im Unterricht. In: Journal für Mathematik - Didaktik 9, 1988, H. 2/3, S. 247-256

Fuchs K.: Simulation dynamischer Prozesse. In: Begabungen gefragt! - 1988, S. 222-226

Fuchs K.: Computer im Geometrisch - Zeichenunterricht - Integrieren statt Ersetzen. In: Informatik und Schule 1989: Zukunftsperspektiven der Informatik für Schule und Ausbildung. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1989

Fuchs K.: Computeralgebrasysteme im Unterricht - Einige konkrete Beispiele. In: Didaktik der Mathematik 3, 1995, S. 228-238

Fuchs K.: Ableiten durch Linearisierung. In: Praxis der Mathematik, 1996 (im Druck)

Fuchs K.: Didaktik der Informatik: Die Logik fundamentaler Ideen. In: Schulpraxis H 4+5, 1994, S. 42-54

Halmos P.: Does Mathematics Have Elements? The Mathematical Intelligencer 3, 1981, S. 147-153

Heugl H.: Computeralgebrasysteme im Mathematikunterricht der Allgemeinbildenden Höheren Schulen in Österreich. MU 41, H. 4, 1995, S. 5-19

Jung W.: Zum Begriff einer mathematischen Bildung. Rückblick auf 15 Jahre Mathematikdidaktik. Math. did. 1, 1978, S. 161-176

Koepf W.: Eine Vorstellung von MATHEMATICA und Bemerkungen zur Technik des Differenzierens. In: Didaktik der Mathematik 21, 1993, S. 125-139

Löthe H.: Benders Kritik und die Wirkung. In: Journal für Mathematik - Didaktik 8, 1987, H. 4, S. 315-319

Mittermeir R. et al: Informatik in der Schule - Informatik für die Schule. Bildungswissenschaftliche Fortbildungstagungen an der Universität Klagenfurt, Verlag Böhlau, Wien, Köln, Weimar, 1992

Reichel H. C.: Fundamentale Ideen der Amgewandten Mathematik. Wissenschaftliche Nachrichten, September 1995, S. 20-25

Reiter A., Rieder A.: Didaktik der Informatik. Verlag Jugend und Volk, Wien, 1990

Roberts N. et al: Introduction to Computer Simulation - A System Dynamics Modelling Approach. Addison - Wesley, Reading, Mass., 1983

Schuppar B.: Reicht es aus, Papert und die LOGO - Philosophie zu kritisieren? In: Journal für Mathematik - Didaktik 8, 1987, H. 3, S. 229-238

Schweiger F.: Fundamentale Ideen zur Analysis und handlungsorientierter Unterricht. Beiträge zum Mathematikunterricht 1982, S. 103-111

Schweiger F.: Funktionen in mehreren Variablen - Aschenputtel der Schulmathematik. ÖMG H 24, 1995, S. 21-34

Tietze U., Klika M., Wolpers H.: Didaktik des Mathematikunterrichts in der SII. Verlag Vieweg, 1981

Wittmann E.: Grundfragen des Mathematikunterrichts. Verlag Vieweg, 1981[6]

Ziegenbalg J.: Anmerkungen zur „Kritik der LOGO - Philosophie". . In: Journal für Mathematik - Didaktik 8, 1987, H. 4, S. 305-313

Mag. Dr. Karl Josef FUCHS
Institut für Didaktik der Naturwissenschaften
Universität Salzburg
Hellbrunnerstraße 34
5020 Salzburg
karl.fuchs@mh.sbg.ac.at